

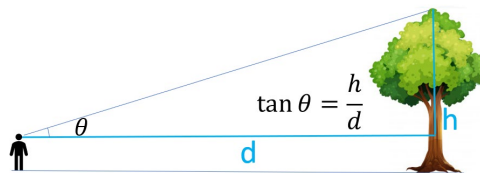
## La trigonometria del Fòrum



Imhotep estava preocupat. La construcció de la piràmide de Saqqara avançaven a bon ritme... però la forma d'una de les cares el preocupava. Va treure el seu escaire amb plomada d'una bossa i va comprovar l'angle del seu pendent: 5 sekeds... Tot havia quedat en una sospita, totes quatre cares eren iguals. Va guardar el seu escaire i es va preguntar què faria sense aquell aparell per mesurar inclinacions...<sup>1</sup>

### Una mica de teoria

La trigonometria és per tot arreu... des de fa molt i molt de temps. De fet es considera que va néixer a Egipte fa uns 4000 anys. És, per tant, una de les primeres branques de les matemàtiques en desenvolupar-se i no és d'estranyar. Els angles són relativament fàcils de mesurar, però les distàncies no ho són, sobretot si són grans. La trigonometria serveix, precisament per relacionar angles i distàncies. Ens permet calcular l'alçada de les muntanyes, la posició del nostre mòbil i fins i tot la distància a estels llunyans! La trigonometria tal com la utilitzem ara, però, va néixer fa relativament poc de la mà d'Euler que va batejar les relacions entre els costats d'un triangle rectangle com a tangent, sinus o cosinus... i de totes aquestes funcions trigonomètriques la reina és la tangent.

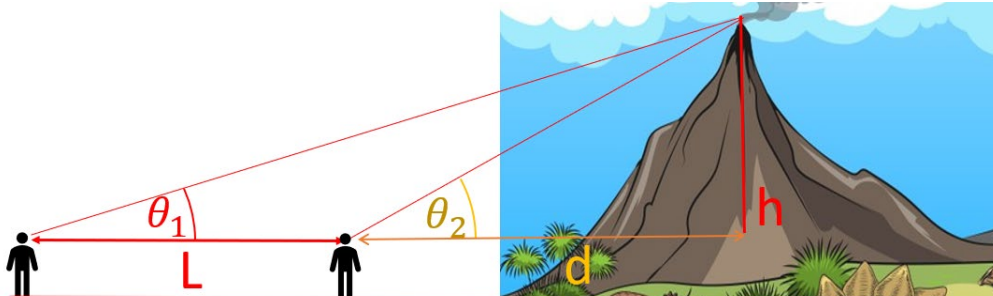


Si volem mesurar l'alçada d'un arbre, podem mesurar per una banda la distància del punt on som fins a la base de l'arbre ( $d$ ) i per altra banda l'angle de la visual del punt més alt de l'arbre amb l'horitzontal ( $\theta$ ). Com que la tangent és senzillament:  $\tan \theta = \frac{h}{d}$  podem aïllar l'alçada  $h$  i obtenim:

$$h = d \cdot \tan \theta$$

<sup>1</sup> Imhotep va ser el que ara diríem, metge, enginyer, astrònom... i arquitecte! Va construir la piràmide de Saqqara, i alguns el consideren el primer "científic" de la història. Per altra banda el seked era una unitat per mesurar angles, a partir de la relació entre els catets d'un triangle rectangle.

El problema el tenim quan no podem accedir a la base de l'objecte que estem mesurant, per exemple quan volem mesurar una muntanya. En aquest cas el que podem fer és mesurar l'angle des d'un punt ( $\theta_1$ ), apropar-nos una distància  $L$  i tornar a mesurar l'angle ( $\theta_2$ ) tal com us ensenyem en la següent figura:



En aquest cas tenim dos triangles rectangles: un des de la posició 1, i un altre des de la segona posició.

- El primer triangle té una base de longitud  $L+d$ , una alçada  $h$ , i l'angle que forma l'horitzontal amb el cim és  $\theta_1$ . Si calculem la tangent d'aquest angle obtenim:

$$\tan \theta_1 = \frac{h}{L+d}$$

- El segon triangle té una base de longitud  $d$ , una alçada  $h$  (com el triangle anterior), i l'angle que forma l'horitzontal amb el cim és  $\theta_2$ . Si ara calculem la tangent d'aquest angle, obtenim:

$$\tan \theta_2 = \frac{h}{d}$$

D'aquests dos triangles no ens interessa la distància a la base  $d$ , el que volem calcular és l'alçada  $h$ . Per tant, aïllant de la segona equació la distància  $d = \frac{h}{\tan \theta_2}$ , i substituint a la primera equació, obtenim una expressió que ens permet calcular l'alçada a partir de tres mesures: l'angle de la primera posició  $\theta_1$ , l'angle de la segona posició  $\theta_2$  i la distància que hem avançat  $L$ :

$$h = L \cdot \frac{\tan \theta_1 \tan \theta_2}{\tan \theta_2 - \tan \theta_1}$$

## El nostre experiment

L'objectiu del nostre experiment és mesurar l'alçada de dues estructures del Fòrum: una per a la qual podem mesurar la distància a la base, i una altra de la que no podem



mesurar aquesta distància... i per fer això començarem construint un senzill aparell per mesurar angles, molt semblant al que utilitzaven els egipcis del principi de la nostra història: l'inclinòmetre.

## Mesurem!



**Abans de començar** cal construir el vostre inclinòmetre a classe amb materials tan senzills com una corda, un paper amb un semicercle dibuixat i un cargol. El primer que farem serà retallar l'inclinòmetre per la línia, de forma que ens quedi fàcilment accessible el semicercle per mesurar els angles.

- Plegarem la part rectangular formant un tub que serà el nostre visor.
- Posarem pega a la zona que ens marca l'inclinòmetre de paper.
- Un cop fet el tub, el reforçarem amb cel·lo per tal que no es desfaci.
- Posarem també un tros de cel·lo just al punt pel punt en què hem de perforar per fer passar el cordill.
- Ara farem el forat, passarem el cordill i el lligarem amb cel·lo per la part de darrere.
- Per últim penjarem de l'extrem del cordill el pes que trobareu a les taules

Si no podeu portar l'inclinòmetre us en facilitarem un amb una resolució lleugerament menor que aquest.

Podeu trobar un vídeo explicatiu en aquest enllaç:



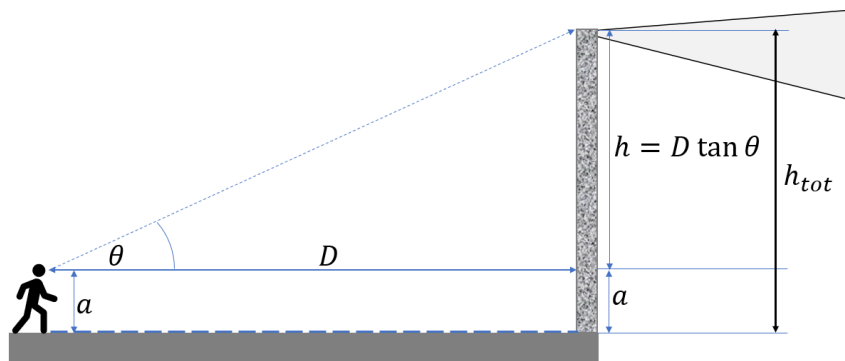
[https://www.youtube.com/watch?v=CsNbfxDQnYM&feature=emb\\_logo](https://www.youtube.com/watch?v=CsNbfxDQnYM&feature=emb_logo)

**Comencem l'experiment!** Teniu dues mesures possibles. Cal que feu la mesura que sigui del vostre nivell. Si just acabeu d'aprendre trigonometria, el primer experiment és el vostre. Si voleu posar-vos a prova, us proposem el segon repte.

## Alçada dels "ocellets"

Una de les estructures del parc del Fòrum són els "ocellets". L'objectiu d'aquest experiment és calcular l'alçada d'una de les columnes d'aquesta estructura. Donat que tenim accés a la base de les columnes primer mesurarem la distància a un punt, i després farem la mesura de l'angle per poder calcular l'alçada.

- Un membre de l'equip agafarà una de les cintes de mesura i l'aguantarà a terra, el més a prop possible de la base de la columna.
- Un altre membre desenrotllarà la cinta fins a una distància d'uns deu metres. Un cop al punt que escolliu per mesurar, deixarà amb cura la cinta mètrica a terra.
- Amb l'inclinòmetre es posarà dempeus i mesurarà l'angle  $\theta$  del punt més alt de la columna que vulgui mesurar.
- L'angle està mesurat des de l'altura dels ulls, per tant cal mesurar també l'alçada  $a$  de la persona que està mesurant. L'afegirem a l'alçada  $h$  que calcularem utilitzant trigonometria.
- Podeu apuntar totes les mesures a la taula de l'apartat "analitzem"

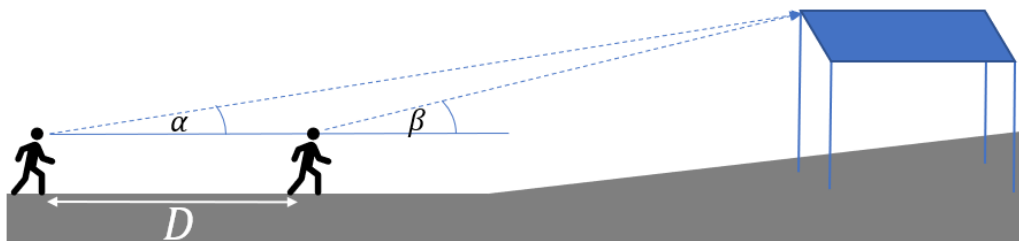


## Alçada de la placa fotovoltaica

Sens dubte, l'estructura més emblemàtica del parc del FÒRUM és la immensa placa fotovoltaica. El repte que us proposem ara és mesurar la seva alçada... però per fer-ho ens trobarem amb alguns problemes, semblants al que es troben els que fan aixecament de perfils topogràfics.

El primer problema que trobem és que, tot i que l'esplanada des d'on mesurarem l'alçada és horitzontal, el terra s'eleva lleugerament després fins a la base de l'estructura. El que farem, de moment, serà mesurar l'alçada des d'on estem nosaltres. Per fer això:

- Ens posem en un punt de l'esplanada i mesurem l'angle  $\alpha$  entre l'horitzontal a l'alçada dels nostres ulls i el punt més alt de la placa fotovoltaica.
- Avancem ara en línia recta una distància  $D$ , que mesurarem amb la cinta mètrica. Com més gran sigui aquesta distància, millor serà la mesura de l'alçada!
- Tornem a mesurar un altre cop l'angle del punt més alt de l'estructura des d'aquesta nova posició.
- Per últim ens cal mesurar l'alçada dels nostres ulls, i tindrem una primera mesura de l'alçada de l'estructura.
- Podeu apuntar totes les mesures a la taula de l'apartat "analitzem".



Us proposem el repte de mesurar l'alçada real de l'estructura. És a dir, quina és la distància entre la base de l'estructura i el punt més alt. Per tant us proposem que corregiu la inclinació del terra fins a la placa fotovoltaica. Us donem un parell de pistes a l'apartat "vull saber més".

## Analitzem!

### Alçada dels “ocellets”

Un cop heu pres totes les dades ja podeu calcular l'alçada d'una de les columnes dels “ocellets”

Distància a la columna	Alçada de la persona	Angle que heu mesurat	Alçada des dels ulls	Alçada total
$D$ (m)	$a$ (m)	$\theta$ ( $^{\circ}$ )	$h = D \operatorname{tg} \theta$ (m)	$h_{tot}$ (m)

### Alçada de la placa fotovoltaica

Si heu escollit el segon experiment, podeu calcular una aproximació de les columnes de la placa fotovoltaica a partir de les vostres mesures.

Distància que avancem	Alçada de la persona	Primer angle $\alpha$	Segon angle $\beta$	Alçada total aproximada
$D$ (m)	$a$ (m)	$\alpha$ ( $^{\circ}$ )	$\beta$ ( $^{\circ}$ )	$h_{tot}$ (m)

## Vull saber més!

**Alçada dels “ocellets”** Les dades que hem obtingut tenen un cert marge d’error, que pot arribar a ser molt gran. Intentem quantificar quin marge d’error tenen les nostres mesures. Per tal de fer-ho suposem que ens hem equivocat en calcular les distàncies i els angles:

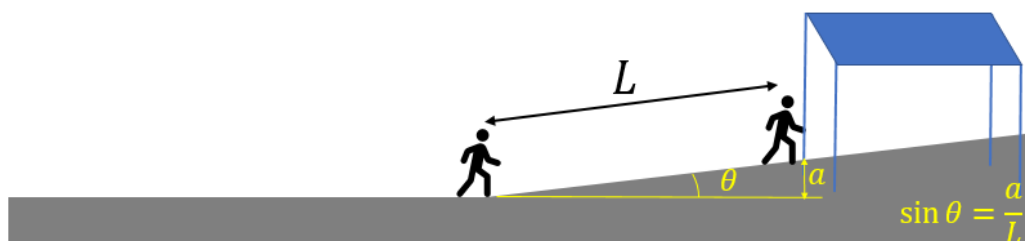
*Quins creieu que són els valors mínims i màxims raonables de les vostres mesures?*

Poseu els valors en la taula següent i tindreu una idea molt acurada del marge d’error de la vostra mesura.

	Distància a la columna	Alçada de la persona	Angle que heu mesurat	Alçada des dels ulls	Alçada total
	$D$ (m)	$a$ (m)	$\theta$ ( $^{\circ}$ )	$h$ (m)	$h_{tot}$ (m)
Alçada mínima					
Alçada màxima					

**Alçada de la placa fotovoltaica.** En aquest cas, en comptes de calcular el marge d’error, us proposem corregir l’alçada de les plaques solars pel fet que el terra és inclinat. Per fer-ho teniu dues opcions:

- Podeu calcular, amb el mateix mètode que abans l’alçada a la base. Ara, però, caldrà tenir en compte que l’alçada és molt més petita i serà millor fer les mesures des del terra.
- La segona opció és calcular quin és l’angle d’inclinació de la base de les plaques solars. Això ho podeu mesurar (d’una forma aproximada) l’inclinòmetre que heu construït. Ara cal que mesureu la distància del terra inclinat fins a la base de l’estructura. Com que no tenim cintes tan llargues, mesureu una passa i calculeu quantes passes hi ha fins a la base. Per últim, podeu calcular quant s’ha elevat el terreny a partir de la definició del sinus...



# Calculating the height of a building

<http://www.virtualmaths.org/activities/shapes/theod2>

Virtualmaths

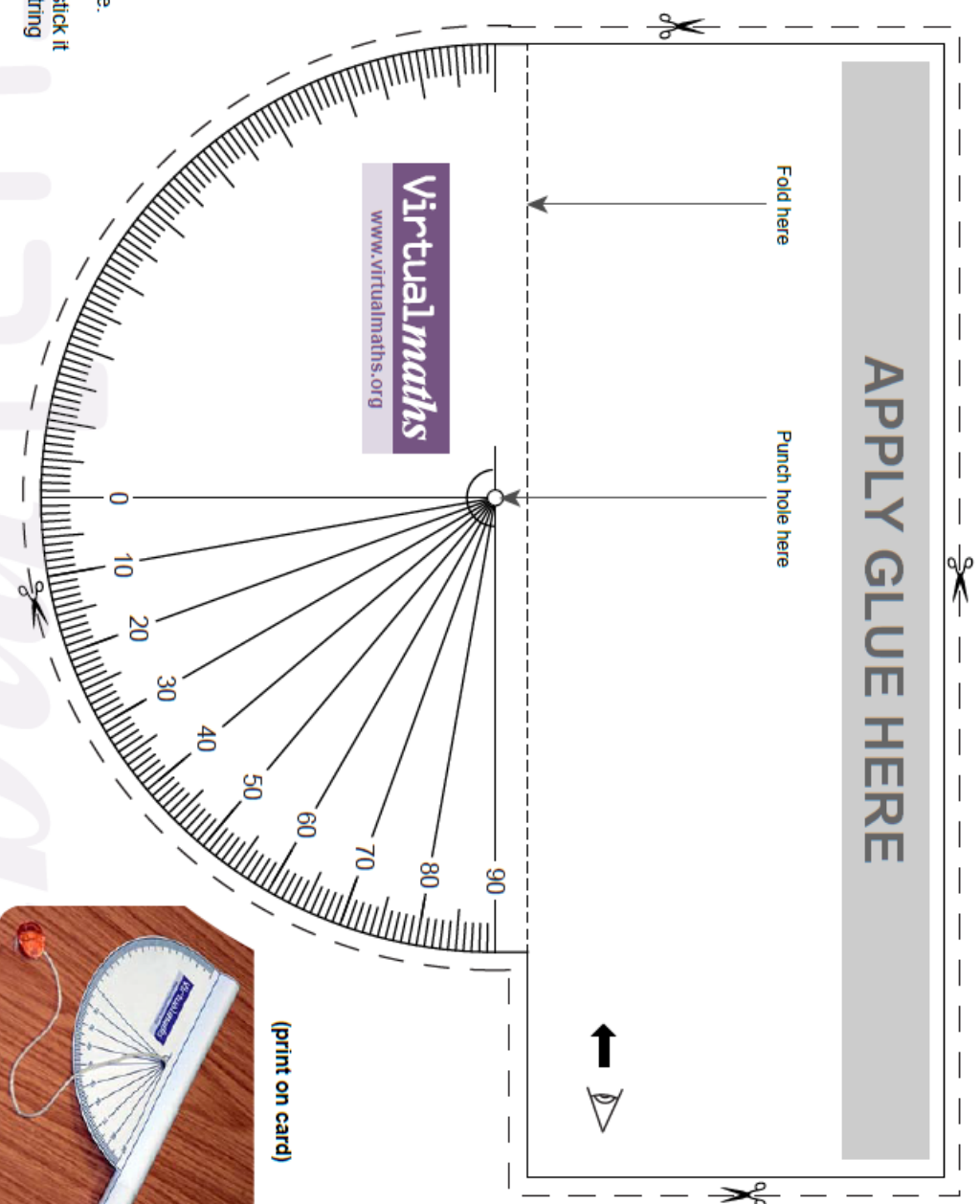
[www.virtualmaths.org](http://www.virtualmaths.org)

## DIY CLINOMETER

### \* Things you'll need

- Some string
- A coin or similar weight
- Scissors
- Glue
- Adhesive tape

- 1 Cut along the dashed line and separate the clinometer shape from this template sheet.
- 2 Carefully punch a hole at the center point of the protractor. Make sure the hole is just large enough to pass your piece of string through - the larger the hole, the less accurate the readings!
- 3 Now fold along the line that attaches the rectangle shape to the protractor, creating a hinge.
- 4 Apply some glue to the gray marked area and roll the rectangle to form your scope.
- 5 Apply some adhesive tape to the scope hinge to add strength.
- 6 Cut off about a foot length of string and thread it through the hole you created earlier. Now take the length you passed through and tie some knots in it so it is held in place and can't pass back through the hole.
- 7 Take a coin or another weighted object and stick it with adhesive tape, to the other side of the string creating a plumb-line.



(print on card)

## Shapes, Space & Measure

## Calculating the height of a building