

Un xoc com una fletxa



Photo by Annie Spratt on Unsplash

Agafa una fletxa amb la mà i llènça-la! I ara fes el mateix amb un arc: col·loca la fletxa, estira la corda veient com a poc a poc es deforma l'arc, i deixa anar. La fletxa guanya molta més velocitat de la segona forma que de la primera.

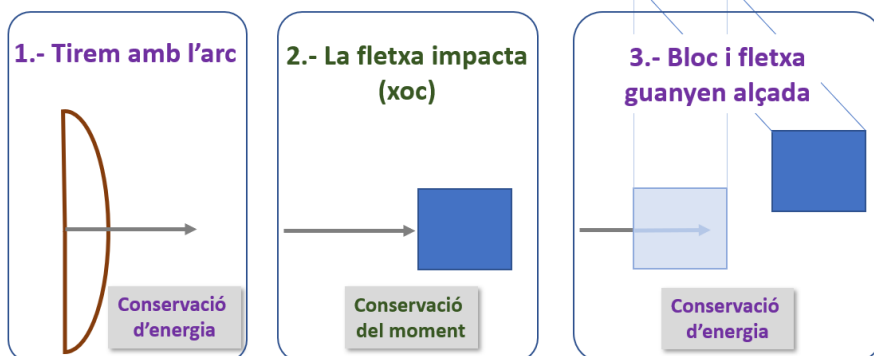
El secret del segon llançament està en la deformació de l'arc: hem pogut emmagatzemar l'energia en la tensió de la seva estructura. Quan deixem anar la corda tota aquesta energia acumulada la deixem anar en uns mil·lisegons i la transferim a la fletxa. L'arc va perdent la tensió acumulada i la fletxa guanya velocitat. Donar a la diana però, és una qüestió d'habilitat...

Una mica de teoria

Calcular la velocitat d'una fletxa no és fàcil: surt tan ràpid que només es pot fer amb una càmera d'alta velocitat... i ara, pot ser, amb el vostre telèfon mòbil. Nosaltres utilitzarem un dispositiu amb el qual transferirem tota l'energia que porta una fletxa volant per l'aire, a un bloc en el qual es quedarà clavada. Aquest bloc, lligat per la part superior a un suport, utilitzarà tota aquesta energia de la fletxa per elevar-se... i a partir de l'alçada que puja calcularem la velocitat de la fletxa. Però anem per parts.

En el nostre experiment podem distingir tres fenòmens físics:

1. Primer tensem l'arc per disparar. Això fa que la fletxa surti disparada.
2. La fletxa impacta contra el bloc.
3. El bloc puja una certa alçada h .



Si voleu saber més sobre la física en disparar la fletxa, podeu donar una ullada, a l'apartat "vull saber més". Aquí parlarem només del segon i el tercer procés, que són els que necessitem per calcular la seva velocitat.

2.- La fletxa impacta contra el bloc:

Canviar la trajectòria d'un mosquit volant, és més fàcil que canviar la d'un camió circulant a 100 km/h per una autopista. Hi ha dues diferències entre mosquit i camió. En primer lloc el mosquit té una massa molt més petita que el camió... però també es desplaça més lentament. La tendència a continuar la trajectòria en línia recta, la inèrcia, depèn per tant de massa i velocitat. Definim una magnitud, que anomenarem moment (\vec{P}), que resumeix la frase anterior:

$$\vec{P} = m \cdot \vec{v}$$

El moment d'una partícula, per tant, és igual al producte de la seva massa per la seva velocitat; i l'única forma de modificar-lo és aplicant una força.¹ (i ara direm una cosa que us farà explotar el cervell). En el xoc no actua cap força sobre el sistema fletxa i la diana²!

Això és cert a causa de la tercera llei que ens diu que qualsevol força que faci la fletxa sobre la diana es veurà compensada per una força de la diana sobre la fletxa. Per tant, el moment TOTAL (fletxa+diana) inicial serà igual al moment TOTAL (fletxa+diana) final:

$$m_{fletxa}v_{fletxa} = (m_{fletxa} + m_{diana})v_{diana}$$

Fixem-nos en tres coses d'aquesta equació:

1. La velocitat inicial de la diana és zero, per tant no hem escrit el seu moment.
2. La fletxa es queda clavada en la diana després del xoc, per tant la velocitat de la fletxa serà igual a la de la diana. Per aquesta raó hem escrit només v_{diana} , i la massa que hem posat és la del conjunt fletxa+diana.
3. No ens hem oblidat els vectors! El moviment té lloc en una dimensió, i hem escrit les equacions només per la component paral·lela al terra (que anomenem normalment x).

¹ Cosa que resumeix molt bé la segona llei de Newton, però escrita amb variació del moment, $\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$. que és una altra forma d'escriure la segona llei de Newton $\vec{F} = m\vec{a}$. De fet Newton va enunciar la seva segona llei com a canvi de moment!

² I tant que actuen forces, però no cal tenir-les en compte: la gravetat actua sobre la fletxa, però la negligim en el moment del xoc respecte a les forces que intervenen en l'impacte. Per altra banda, sobre el bloc actua la gravetat que s'anul·la amb la normal del mecanisme que l'aguanta: no hem de patir per tant pel bloc. El fregament entre les juntes tampoc els considerem per que és molt petit comparat amb la força del xoc.

3.- Bloc i fletxa s'eleven

Amb el xoc ja hem aconseguit transferir l'energia cinètica de la fletxa a la diana (i a la fletxa que queda enganxada). Ara, tota aquesta energia cinètica la invertirem en què fletxa i bloc pugin una certa alçada h . És a dir: guanyin energia potencial. Per tant:

$$\frac{1}{2}(m_{fletxa} + m_{diana})v_{diana}^2 = (m_{fletxa} + m_{diana})gh$$

La massa del conjunt fletxa+diana està a banda i banda de l'equació. Simplificant i aïllant la velocitat de la diana:

$$v_{diana} = \sqrt{2gh}$$

La velocitat de la diana que fa que pugui el conjunt, és la mateixa que la final del xoc, per tant:

$$v_{diana} = \frac{m_{fletxa}}{(m_{fletxa} + m_{diana})} v_{fletxa} = \sqrt{2gh}$$

Per tant, tenim una relació directa entre l'alçada a què arriben diana i fletxa i la velocitat inicial de la fletxa:

$$v_{fletxa} = \frac{(m_{fletxa} + m_{diana})}{m_{fletxa}} \cdot \sqrt{2gh}$$

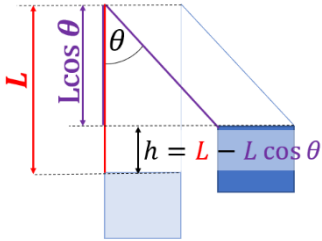
El nostre experiment

El nostre experiment té dues zones per fer l'experiment i una tercera zona de càlcul: diferenciades:

- **Zona de tir:** Des d'aquest punt dispararem les fletxes a la diana. Dispararem un màxim de tres fletxes. Però **pararem així que donem al blanc**. Llavors deixarem arc i fletxes a terra i sortirem totes i tots de la zona de tir.
- **Zona de mesura:** *Un cop tothom estigui fora de la zona de tir*, ens podem apropar a la diana. Llavors mesurarem l'alçada que s'ha elevat diana i fletxa. Ho farem a partir de l'angle màxim d'inclinació dels suports respecte a la vertical (veurem com es relacionen a continuació).
- **Zona de càlcul:** Un cop heu fet l'experiment sortiu de la zona experimental i aneu a la zona que tenim reservada per fer els càlculs. Si volguéssiu tornar a fer l'experiment, cal sortir de la prova i tornar a fer la cua.

No pot haver-hi ningú en la zona de mesura si hi ha algú en la zona de tir

Qualsevol grup que no respecti aquesta norma, o qualsevol altra indicació de monitores o monitors serà expulsat immediatament de la prova!



L'alçada a la qual s'han elevat diana i fletxa, la mesurarem a partir de l'angle màxim respecte a la vertical que han pujat els suports verticals del bloc.

La longitud de les barnilles que uneixen la diana amb el suport tenen una longitud $L = 0,5 \text{ m}$. Per tant *respecte a l'eix de gir*, quan el bloc està al punt més baix la seva alçada és, precisament L .

La fletxa impacta contra la diana, i aquesta puja una alçada h , però el que mesurem és l'angle θ . Aquest cop, la longitud vertical *respecte a l'eix de gir* que té el bloc és $L \cos \theta$.

Per tant, l'alçada que ha pujat la diana és aquesta longitud menys la longitud inicial, per tant $h = L(1 - \cos \theta)$.

Mesurem!

Abans de començar dirigiu-vos cap a la zona de tir, i comproveu que teniu l'arc i tres fletxes. Si falten les fletxes adreceu-vos a la persona responsable que trobareu identificada amb una bata.

Comencem l'experiment!

En primer lloc anem a la **zona de tir**. Un cop estem preparades i preparats per tirar amb l'arc, seguim les següents instruccions:



- Fem passar la fletxa pel forat de l'arc.
- Encaixem la ranura de la fletxa en la corda de l'arc, entre les dues marques blanques que té la corda.
- Posem els peus de forma que quedem mirant en direcció perpendicular a la diana. Després girem el cos cap a la diana per tirar.



- Agafem la corda amb tres dits: dos per sota de la fletxa i un per sobre.
- Tensem l'arc mentre apropem la corda a la nostra galta.



- Per últim deixem anar la corda, i deixem que la inèrcia faci la resta.



Photo by Sadie Esch-Laurent on Unsplash

F1.- Xocs

VISIONS: STEAM-FÒRUM

Tenim tres intents per donar a la diana. En cas que no l'encerteu aviseu a la monitora o al monitor. Si heu encertat la diana abans d'exhaurir els tres intents, heu de parar de disparar fletxes.

Anem ara a la **zona de mesura** on veurem un indicador que marca l'angle de desviació de les barnilles que suporten la diana. Aquest és l'angle amb el qual podrem calcular la velocitat de la fletxa. Apuntem aquest nombre a la taula que trobareu a l'apartat "analitzem".

Analitzem!

Calculem ara quina és la velocitat de la fletxa. Per fer-ho, nosaltres hem mesurat abans la massa de la diana $m_{diana} = 1 \text{ kg}$ i la massa de la fletxa $m_{fletxa} = 10 \text{ g}$ i la longitud de les barnilles de suport ($L = 0,5 \text{ m}$). Ompliu la taula per tal de calcular l'alçada h , i amb ella la velocitat de la fletxa:

	$m_f + m_d$	Angle θ	$h = L(1 - \cos \theta)$	$v_f = \sqrt{2gh}$	v_{fletxa}
Unitats	kg	graus	metres	$\left(\frac{m}{s}\right)$	$\left(\frac{km}{h}\right)$
Primera mesura					
Segona mesura					

Vull saber més!

... i si cau la fletxa?

En alguns casos la fletxa pot caure a terra i no enganxar-se al bloc. Si suposem que un cop s'ha produït el xoc la fletxa no surt rebotada, sinó que simplement cau a terra, podem calcular quina és la seva velocitat igualment. L'únic que passarà és que no ens caldrà afegir la massa de la fletxa a la de la diana en la conservació del moment ni de l'energia.

Si passa això: com canviarà el nostre càlcul de la velocitat de la fletxa?

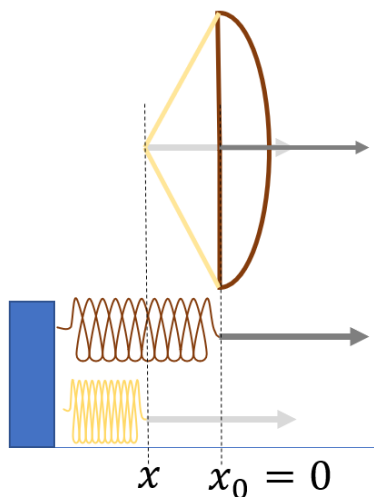
... i la velocitat de la diana?

Podem calcular també quina és la velocitat amb què surt la diana després que la fletxa impacti contra ell. Només necessitarem l'equació de la conservació de l'energia i aïllar la velocitat de la diana d'aquesta.

Per cert... imaginem ara que la fletxa surt rebotada amb un xoc perfectament elàstic. En aquest cas quina seria la velocitat que calcularíem de la fletxa?

... i el tir amb l'arc?

Quan estem tensant l'arc per llençar la fletxa notem que al principi ens costa poc. Però com més desplaçem la fletxa de la seva posició inicial, més ens costa... us sona alguna força que sigui més intensa com més t'allunyes de la posició inicial? Efectivament! La força elàstica. Si prenem $x=0$ quan no es fa cap força sobre la fletxa, podem escriure:



$$F = -kx$$

La llei de Hooke. Fixem-nos en una cosa interessant: el signe negatiu!

- Si deformem l'arc o la molla cap a la dreta, x serà positiva, i la força negativa. Per tant la força fa tornar la fletxa al seu lloc.
- Si deformem l'arc o la molla cap a l'esquerra, llavors la x és negativa. Però llavors, el signe negatiu, farà ara que la força sigui positiva. Per tant tornarà un altre cop la fletxa al punt de partida

Això és el que s'anomena una força "recuperadora", que tossudament impedeix qualsevol moviment que tregui a la fletxa de l'equilibri... En aquest cas l'energia potencial associada a aquesta força serà:

$$E_{p,elàstica} = \frac{1}{2}kx^2$$

Ara podem fer el següent:

- Coneixem l'energia cinètica de la fletxa en sortir de l'arc (suposarem que la velocitat de la fletxa no disminueix per culpa del fregament entre que surt de l'arc i arriba a la diana!)
- Inicialment l'energia de la fletxa serà exclusivament una energia potencial elàstica, ja que abans de deixar anar la fletxa la seva velocitat és nul·la.

Això vol dir que $E_{p,elàstica} = E_{cinètica}$ i per tant

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv_{fletxa}^2$$

Sabem la velocitat de la fletxa, i podem aproximar la distància que hem tensat la corda x . Sí, aquí cal fer una aproximació! Per tant ara *podem calcular la constant elàstica de l'arc!*

Pregunta. Si incrementem per dos la distància que tensem l'arc: com augmentarà la velocitat de la fletxa?